Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a III-a

1: Puneți semnele potrivite $(+; -; \times; :)$ şi paranteze (acolo unde este cazul), pentru a obține rezultatele:

(4p) **a)** $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad = 0$

(5p)**b)** $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad = 5$

2:(4p) **a)** Găsiți trei numere naturale a căror sumă să fie 10 iar produsul 20.
(5p)**b)** Găsiți toate numerele impare de trei cifre în care cifra zecilor este 9 iar suma dintre cifra sutelor, cifra zecilor şi cifra unităților este 23.

3: Să se determine numerele $\overline{ab}$ (numere naturale de două cifre) care au proprietatea că :
(4p) **a)** fiecare este egal cu dublul sumei cifrelor sale
(5p) **b)** fiecare este de patru ori suma cifrelor sale

4: (9p) În țara lui Obelix, moneda oficiala este OBELINUL.
Obelix îşi cumpără un nou costum pentru balul de la castel, plătind 69 de OBELINI în monede de 2 OBELINI, 3 OBELINI şi 5 OBELINI.Numărul monedelor de 2 OBELINI este de 3 ori mai mic decât al celor de 5 OBELINI şi de 2 ori mai mic decât al celor de 3 OBELINI.
Câte monede din fiecare foloseşte pentru a plăti suma de 69 de OBELINI ?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a IV-a

1: a) Aflați necunoscuta:
$1+\{2\cdot[3+(x-4)\cdot 5]:6\}\cdot 7=8$

b) Aflați numerele naturale x, y, z ştiind că $x\cdot z+7\cdot y\cdot z+z=49$ şi
$x+7\cdot y=6$

2:a) Suma a trei numere naturale este 878. Dacă împărțim primul număr la al doilea obținem câtul 1 şi restul egal cu al treilea numar care este cu 125 mai mic decât al doilea. Aflați cele trei numere.

b) Aflați câte cifre de 4 sunt in scrierea numărului:
$\overline{1234...498499500}$

3:a) Şase copii udă 6 pomi în 6 minute.
Câți copii vor uda 48 de pomi în 12 minute?

b) Aflați numarul $\overline{aabc}$ ştiind că $\overline{aabb}+\overline{cc}=1155$

4: Să se afle vârstele celor 2 frați Lolek şi Bolek, ştiind că în urmă cu 1 an vârsta lui Bolek era de 3 ori mai mare decât diferența vârstelor lor, iar peste 2 ani, suma vârstelor lor va fi de 3 ori mai mare decât vârsta actuală a lui Lolek.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a V-a

1: (9p) Doi copii, Ionel şi Mihai, sunt colecţionari de timbre. Dacă Ionel îi dă lui Mihai 13 timbre, atunci Mihai va avea de patru ori mai multe timbre decât Ionel. Dacă Mihai îi dă lui Ionel 7 timbre, atunci Mihai va avea de două ori mai multe timbre decât Ionel.

Câte timbre are fiecare copil?

Niculaie Marin Goşoniu

2: (4p) **a)** Determinaţi mulţimea $A = \{\overline{bc} \mid \text{ există } a \in N \text{ astfel încât } a^{b^c} = 16\}$

(5p) **b)** Să se arate că mulţimea A se poate scrie ca reuniune disjunctă de trei submulţimi care au aceeaşi sumă a elementelor.

Traian Preda

3: (5p) **a)** Să se afle câte numere naturale se pot scrie sub forma:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

(4p) **b)** Să se afle câte numere dintre cele de la punctul **a)** nu se pot scrie sub forma

$$\overline{mnn} + \overline{nmm}$$

Traian Preda

4: Se dă mulţimea $M = \{4,11,18,25,...,186,193,200\}$

(4p) **a)** Să se afle cardinalul mulţimii M.

(5p) **b)**Dacă A este o submulţime a lui M, iar $card(A) = 16$, să se arate că în A există două numere a căror sumă este 211.

Niculaie Marin Goşoniu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore şi 30 de minute.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a VI-a

1: (4p)**a)** Scrieți elementele mulțimii $A = \left\{ \overline{ab} \in N \mid \frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{ba}}{7} \right\}$

(5p)**b)** Arătați că numerele $a = 2^n \cdot 5^{n+1} + 7$ şi $b = 2^{n+1} \cdot 5^n + 3, n \in N$ sunt prime între ele.

Dorela Făiniş

2: Fie $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ unghiuri formate în jurul punctului O, astfel încât

$$\frac{1}{7} m(\angle AOB) = \frac{1}{4} m(\angle BOC) = \frac{1}{3} m(\angle COD) = m(DOA)$$

(4p) **a)** Să se afle măsurile celor patru unghiuri.

(5p) **b)** Să se arate că semidreapta opusă semidreptei (OC este bisectoarea unghiului $\angle AOB$.

3: Să se arate că nu exista numere naturale x si y astfel încât $x^2 - 2y^2 = 3$

Niculaie Marin Goşoniu

4: Se consideră mulțimea $A_n = \{X \mid X$ are n cifre si suma cifrelor lui X este egală cu produsul cifrelor lui X$\}$

(4p) **a)**Să se afle mulțimea A_3

(5p) **b)**Să se arate că pentru orice n cu, $3 \le n \le 10$, $A_n \neq Ø$

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore şi 30 de minute.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a VII-a

1: (4p)**a)** Dacă $\frac{x+y}{x} = \sqrt{3}+1$, calculați: $\frac{y\sqrt{3}-x}{y+x\sqrt{3}}$

(5p)**b)** Fie $x, y \in Q$. Arătați că:

$\frac{x+y}{\sqrt{3}} + \frac{x-y}{\sqrt{12}} \in Q$ dacă şi numai dacă: $\frac{x+2y}{\sqrt{2}} - \frac{3y-x}{\sqrt{8}} \in Q$.

Cristian Olteanu, Traian Preda

2: Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 6, 8, 11, 13, ..., 2001, 2003, 2006, 2008\}$.

(3p) **a)**Indicați o proprietate caracteristică a elementelor mulțimii A şi aflați *card A.*

(3p) **b)**Demonstrați că daca M este o submulțime a lui A, cu $card\, M = 403$,atunci M conține cel puțin două elemente a căror sumă este 2009.

(3p) **c)**Să se calculeze cardE, unde $E = \{x \mid x \in A, x \vdots 7$ şi $x \not\vdots 3\}$

Niculaie Marin Goşoniu

3: (9p) Lungimile a şapte segmente sunt $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ şi $10 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5 \le x_6 \le x_7 \le 100$. Arătați că printre aceste şapte segmente se găsesc trei cu care se poate construi un triunghi.

Liviu Oprişescu

4: (9p)Fie triunghiul ABC şi I centrul cercului său înscris.Notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB şi respectiv AC, iar P şi Q intersecțiile dreptei MN cu dreptele BI şi respectiv CI. Ştiind că $PQ = \frac{AI}{2}$, să se demonstreze că $m(\angle PAQ) = 30^o$.

Marius Damian, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a VIII-a

1: Se consideră expresia $E(a,b,c) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $a,b,c \in \Re^*$.

(3p) **a)** Calculați $E\left(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-\frac{1}{4}\right)$

(3p) **b)** Dacă $E(a;b;c)=1$, calculați $(a+b)(a+c)(b+c)$

(3p) **c)** Rezolvați in $\Re$ ecuația:

$$(3x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}}+\frac{1}{x-\sqrt{3}}+\frac{1}{x-\sqrt{5}}\right)=1$$

Dan Nedeianu

2: (3p) **a)**Demonstrați inegalitatea:

$$\overline{ab}^3+\overline{ba}^3 \le \overline{aa}^3+\overline{bb}^3$$

Traian Preda

(3p) **b)** Să se arate că : $\frac{4a^2+2a+1}{a}-\frac{12a}{4a^2+2a+1} \ge 4, \forall a > 0$

D.M. Bătinețu Giurgiu

(3p) **c)** Să se arate că pentru orice numere reale strict pozitive a,b,c este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Nicolae Papacu

3: Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $A'M = AN$ unde $M \in [A'D]$ şi $N \in [AC]$. Se cere:

(4p) **a)** Să se arate că $MN \parallel (ABB')$

(5p) **b)** Să se arate că $MN \ge \frac{l\sqrt{2}}{2}$, unde *l* este muchia cubului $ABCDA'B'C'D'$.

Liviu Oprişescu

4: (9p) Fie $ABCD$ un tetraedru cu toate fețele triunghiuri ascutitunghice. Să se arate că există un vârf al tetraedrului cu ale cărui muchii se poate forma un triunghi ascuțitunghic.

Revista Arhimede

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a IX-a

1: Se consideră în triunghiul ABC punctele $A_1 \in (BC), B_1 \in (AC), C_1 \in (AB)$

cu proprietatea că: $\dfrac{\left\|\overrightarrow{BA_1}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CA_1}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CB_1}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB_1}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AC_1}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC_1}\right\|}$. Să se demonstreze că:

(5p) **a)** $\left\|\overrightarrow{AA_1}\right\|, \left\|\overrightarrow{BB_1}\right\|, \left\|\overrightarrow{CC_1}\right\|$ sunt lungimile laturilor unui triunghi.

(4p) **b)** Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au acelaşi centru de greutate.

Iuliana Turcu

2 : Se consideră şirul de numere reale pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea:

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + ... + a_n \cdot a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \geq 1 .$$

Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(4p) **a)** şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică

(5p) **b)** $a_1 = 1$

Teodora Rădulescu

3 : Fie $n \in N^*$. Să se demonstreze că:

(5p) **1)** $\sqrt{9n-2} < \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+4\sqrt{n}}{2} < \sqrt{9n}$

(4p) **2)** $\left[\dfrac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+4\sqrt{n}}{2}\right] = \left[\sqrt{9n-2}\right]$

Marius Drăgan

4 : (9p) Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ numere reale pozitive cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Atunci $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i + n}{1 + x_i^2} \leq n^2$.

Sorin Rădulescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a X-a

1: Să considerăm vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ cu $\|\vec{v_1}\| = \|\vec{v_2}\| = \|\vec{v_3}\| = 1$ .Să se demonstreze că:

(4p) **a)** $\|\vec{v_1} + \vec{v_2}\|^2 + \|\vec{v_1} - \vec{v_2}\|^2 = 2\left(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\right)$

(5p) **b)** $\|\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}\| + \|\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}\| \leq 2\sqrt{5}$

I.V. Maftei

2: Să se rezolve următoarele ecuații:

(3p) **a)** $4^x + 16^x = 2^{3x+1}$

(3p) **b)** $\lg^2 x = \lg^2 (x+1)$

(3p) **c)** $3^x + 4^x = 12^x + 1$

Lenuța Pîrlog

3: (9p) Să se determine toate numerele complexe z cu proprietatea că $\left|1 + z^{2n+1}\right| \leq 1, \forall n \geq 1$.

Sorin Rădulescu

4: Fie $f : \Re \to \Re, f(x) = -x + 2[x]$ şi $g(x) = -x - 2[-x]$

(3p) **a)** Să se calculeze $f \circ g$ şi $g \circ f$.

(3p) **b)** Să se arate că f este inversabila şi să se calculeze inversa ei.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația: $f(f(x)) = x$

Adrian Troie

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a XI-a

1: (4p) **a)** Să se determine toate funcțiile $f:\Re \to \Re$ care au limite laterale finite în orice punct şi care verifică condiția $f(x)=f(2x), \forall x \in \Re$.

(5p) **b)** Să se găsească funcțiile f cu proprietatea lui Darboux care verifică condițiile de la punctul precedent şi $f(1)=1$.

Dan Popescu

2: (9p) Fie $A \in M_n(C)$ şi $X, Y \in M_{n,1}(C)$.

Să se demonstreze că: $\det(A + XY^T) = \det A + Y^T A^* X$.

Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu

3: Fie $A, B \in M_2(C)$ şi $n \in N^*$ cu proprietatea că:

$(AB - BA)^{2n} = (AB)^{2n} - (BA)^{2n}$

Atunci sunt adevărate urmatoarele afirmații:

(3p) **1)** $tr(AB)^2 = tr(BA)^2$

(3p) **2)** $(AB - BA)^2 = O_2$

(3p) **3)** $tr(AB)^2 = trA^2B^2$

Marius Drăgan

4: Se dă şirul $(x_n)_{n \in N^*}$ de numere reale strict pozitive definit prin relația

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{\sqrt{n}}, \forall n \in N^*.$$

Să se arate că:

(4p) **1)** şirul $(x_n)_{n \ge 1}$ este strict crescător.

(5p) **2)** Şirul $(x_n)_{n \ge 1}$ este divergent.

I.V.Maftei

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a XII-a

1: Dacă $n \in N^*$ să notăm $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$ .Să se calculeze:

(4p) **a)** I_0 şi I_1

(5p) **b)** $\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ **.**

I.V.Maftei

2: **(**9p) Să se determine cel mai mic număr natural n cu proprietatea că
$A^n = I_2, \forall A \in M_2(Z_2)$ inversabilă.

3: (9p) Fie A inel şi $a,b,c \in A$. Dacă este îndeplinită condiţia
$x^4 + ax^3 + bx + c = 0, \forall x \in A$, să se demonstreze că inelul A este comutativ.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

4: (9p) Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^1 \frac{dt}{t\sqrt{t+1} + (t+1)\sqrt{t}}$$

Georgeta Alexandrescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 şi 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3 ore.